

КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ, ПОРОЖДЕНОЕ РЕШЕТКОЙ ПОДПОРЯДКОВ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЦЕПИ

Самариддин Эрматович Исомиддинов¹
Марина Владимировна Швидефски²

¹Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

^{1,2}Новосибирск, Россия

¹s.isomiddinov@g.nsu.ru

²m.schwidefsky@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4804-8073>

Аннотация

Установлено, что квазимногообразие, порожденное решеткой подпорядков четырехэлементной цепи, является многообразием. Найден базис тождеств этого многообразия.

Ключевые слова и фразы

базис тождеств, многообразие, решетка.

Источник финансирования

Второй автор работал в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2026-0032.

Для цитирования

Исомиддинов С. Э., Швидефски М. В. Квазимногообразие, порожденное решеткой подпорядков четырехэлементной цепи // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 95-127. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-95-127

The quasivariety generated by the suborder lattice of a four-element chain

Samariddin É. Isomiddinov¹, Marina V. Schwidefsky²

¹Novosibirsk National Research State University,

²Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,

^{1,2}Novosibirsk, Russia

¹s.isomiddinov@g.nsu.ru,

²m.schwidefsky@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4804-8073>

Abstract

The quasivariety generated by the suborder lattice of a four-element chain is established to be a variety. An equational basis for this variety is found.

Keywords

equational basis, variety, lattice.

Funding

The contribution of the second author was within the frames of the state contract of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, project no. FWNF-2026-0032.

For citation

Isomiddinov S. É., Schwidefsky M. V., The quasivariety generated by the suborder lattice of a four-element chain // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 95-127. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-95-127

§ 1. Введение и постановка задачи

Решетки подпорядков изучались в работах [1, 2]. В частности, в работе [2] был поставлен вопрос, верно ли, что квазимногообразие $\mathbf{SP}(\mathbf{O}(X, R))$, порожденное конечной решеткой подпорядков $\mathbf{O}(X, R)$, является многообразием. Очевидно, что этот вопрос имеет положительный ответ для любого частично упорядоченного множества (X, R) длины не более 1, поскольку для такого множества (X, R) квазимногообразие $\mathbf{SP}(\mathbf{O}(X, R))$ совпадает с многообразием дистрибутивных решеток.

Хорошо известно (см., например, [3]), что квазимногообразие $\mathbf{SP}(\mathbf{O}(3))$, порожденное решеткой подпорядков трехэлементной цепи $\mathbf{O}(3)$, является многообразием и поэтому конечно базлируемо по теореме Р. Маккензи [4]; в работе [5] был найден конкретный (конечный) базис тождеств для этого многообразия. Таким образом, для решетки подпорядков $\mathbf{O}(3)$ ответ на вопрос, приведенный выше, положителен. Кроме того, нахождение такого конкретного базиса тождеств позволило в дальнейшем установить дуальную эквивалентность категории, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(\mathbf{O}(3))$, а морфизмами — полные решеточные гомоморфизмы, и одной категории специальных пространств, см. [6]. Для нахождения этой дуальной категории пространств были использованы идеи работ [7, 8].

Для конечных частично упорядоченных множеств длины не более чем 2 положительный ответ на вопрос выше был получен в работе [9].

Основной задачей, стоящей перед нами, является нахождение базиса тождеств решетки подпорядков четырехэлементной цепи $O(4)$. В дальнейшем мы планируем использовать этот базис для нахождения дуальных категорий пространств для многообразия, порожденного решеткой $O(4)$. Наш основной результат — теорема 1.

Терминология по теории решеток соответствует книгам [10, 11]. Терминология и обозначения, касающиеся универсальной алгебры, соответствуют книге [12].

Следуя соглашению, принятому в работах [1, 2], мы считаем далее, что R является *строгим частичным порядком*, то есть иррефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением на множестве X , а $O(X, R)$ обозначает решетку *строгих* подпорядков в R . Это соглашение никак не отражается на строении решетки подпорядков. Более точно, если R' является *частичным порядком*, то есть рефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением на множестве X , а $R = R' \setminus \{(a, a) \mid a \in X\}$, то $O(X, R) \cong O'(X, R')$.

§ 2. Основные определения

Доказательство следующего утверждения из работы [1], приведенное в этой работе, неполное. Поэтому мы приведем полное доказательство этого утверждения, которое мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1. [1, лемма 1.1] *В решетке $O(X, R)$ неразложимыми элементами являются атомы и только они.*

Доказательство. Если $|R'| > 1$ для некоторого $R' \in O(X, R)$, то мы можем считать, что (X, R') содержит трехэлементную цепь $a < b < c$, поскольку в противном случае R' , очевидно, не является неразложимым элементом решетки $O(X, R)$. Согласно лемме Цорна, существует максимальная антицепь $B \subseteq X$, такая что $b \in B$. Рассмотрим множества

$$A_0 = \{x \in X \mid x \leq b' \text{ для некоторого } b' \in B\};$$

$$A_1 = \{x \in X \mid x \geq b' \text{ для некоторого } b' \in B\}.$$

Тогда $A_0 \neq \emptyset \neq A_1$, поскольку $a \in A_0$ и $c \in A_1$. Кроме того в силу максимальной антицепи B имеем равенство $X = A_0 \cup A_1$. Полагаем

$$R_0 = A_0^2 \cap R', \quad R_1 = A_1^2 \cap R', \quad R_2 = R' \setminus (R_0 \cup R_1)^t.$$

Очевидно, что $R_0, R_1 \in O(X, R)$ и $R_0 \neq \emptyset \neq R_1$. Покажем, что $R_2 \in O(X, R)$. Для этого нужно показать, что отношение R_2 транзитивно замкнуто. Действительно, пусть $(x, y), (y, z) \in R_2 \subseteq R'$. В силу равенства

$X = A_0 \cup A_1$ найдется элемент $b' \in B$, такой что $b' \leq y$ или $b' \geq y$. Если $b' \geq y$, то $x < y \leq b'$, поэтому $(x, y) \in R_0 \cap R_2 = \emptyset$. Если $b' \leq y$, то $b' \leq y < z$, поэтому $(y, z) \in R_1 \cap R_2 = \emptyset$. В обоих случаях мы столкнулись с противоречием. Это означает, что R_2 не может содержать одновременно пары (x, y) и (y, z) ни для каких элементов $x, y, z \in X$. Таким образом, $R_2 \in O(X, R)$.

По нашему определению подпорядка R_2 имеем равенство $R' = R_0 \vee R_1 \vee R_2$ в решетке $O(X, R)$. Так как $(a, b) \in R_0 \setminus (R_1 \vee R_2)$ и $(b, c) \in R_1 \setminus (R_0 \vee R_2)$, мы делаем вывод, что элемент R' не является неразложимым в решетке $O(X, R)$. $\square$

Определение 1. Пусть L является решеткой, пусть $J(L)$ обозначает множество $\vee$ -неразложимых элементов решетки L и пусть $J \subseteq J(L)$. Назовем L J -решеткой, если L обладает следующими свойствами.

- (i) Для любого элемента $a \in L$ найдется подмножество $J_a \subseteq J$, такое что $a = \bigvee J_a$.
- (ii) Для любого элемента $a \in J$ и любого нетривиального покрытия $a \leq a_0 \vee \dots \vee a_n$, где $n < \omega$ и $a_0, \dots, a_n \in L$, найдется конечное множество $F \subseteq J$, такое что $a \leq \bigvee F$ является минимальным покрытием и $F \ll \{a_0, \dots, a_n\}$.

Лемма 2. Для любого частично упорядоченного множества $\langle X, R \rangle$ решетка подпорядков $O(X, R)$ является J -решеткой, где

$$J = \{ \{(a, b)\} \mid (a, b) \in R \}.$$

Доказательство. По лемме 1 множество J есть множество всех (вполне) неразложимых элементов решетки подпорядков $O(X, R)$. Покажем, что любое нетривиальное покрытие произвольного элемента множества J можно утончить до минимального. Итак, пусть $\{(a, b)\} \leq \bigvee_{i \in I} R_i = (\bigcup_{i \in I} R_i)^t$ является нетривиальным покрытием в $O(X, R)$. Это означает, что найдутся $k < \omega$ и элементы $a_0, \dots, a_k \in X$, такие что $k > 0$ и $\{(a, b)\} \leq \{(a_0, a_1)\} \vee \{(a_1, a_2)\} \vee \dots \vee \{(a_{k-1}, a_k)\}$, где $a_0 = a$ и $a_k = b$. $\square$

§ 3. Тождества, истинные на решетке $O(4)$

3.1 Тождество (D_3)

Следуя [13], рассмотрим следующее тождество 3-дистрибутивности, которое обозначим через (D_3) :

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2 \vee y_3) = \bigvee_{0 \leq i < j < k \leq 3} [x \wedge (y_i \vee y_j \vee y_k)].$$

Следующее утверждение является частным случаем [9, следствие 3].

Предложение 1. Пусть L является J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тождество (D_3) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1 \vee \dots \vee b_n$ является минимальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, b_1, \dots, b_n \in J$, то $0 < n < 3$.

Лемма 3. В решетке $O(4)$ выполнено тождество (D_3) .

Доказательство. В силу леммы 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где $J = \{\{(i, j)\} \mid 0 \leq i < j \leq 3\}$. Выпишем все минимальные покрытия для всех элементов множества J в решетке $O(4)$:

$$\begin{aligned} \{(0, 2)\} &\leq \{(0, 1)\} \vee \{(1, 2)\}; \\ \{(1, 3)\} &\leq \{(1, 2)\} \vee \{(2, 3)\}; \\ \{(0, 3)\} &\leq \{(0, 1)\} \vee \{(1, 3)\}; \\ \{(0, 3)\} &\leq \{(0, 2)\} \vee \{(2, 3)\}; \\ \{(0, 3)\} &\leq \{(0, 1)\} \vee \{(1, 2)\} \vee \{(2, 3)\}. \end{aligned}$$

Видно, что любое минимальное покрытие произвольного элемента множества J содержит не более трех элементов. Таким образом, выполняется условие (ii) предложения 1. Поэтому тождество (D_3) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 1. $\square$

3.2 Тожество (C_2)

Обозначим следующее тождество через (C_2) :

$$\begin{aligned}
 x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1) \wedge (w_0 \vee w_1) &= \bigvee_{i < 2} [x \wedge y_i \wedge (z_0 \vee z_1) \wedge (w_0 \vee w_1)] \vee \\
 &\vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge z_i \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (w_0 \vee w_1)] \vee \\
 &\vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge w_i \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1)] \vee \\
 &\vee \bigvee_{i, j < 2} [x \wedge ((y_i \wedge z_j) \vee (y_{1-i} \wedge z_{1-j})) \wedge (w_0 \vee w_1)] \vee \\
 &\vee \bigvee_{i, j < 2} [x \wedge ((y_i \wedge w_j) \vee (y_{1-i} \wedge w_{1-j})) \wedge (z_0 \vee z_1)] \vee \\
 &\vee \bigvee_{i, j < 2} [x \wedge ((z_i \wedge w_j) \vee (z_{1-i} \wedge w_{1-j})) \wedge (y_0 \vee y_1)].
 \end{aligned}$$

Тожество (C_2) является частным случаем тождества (C_n) , введенного в [9] и используемого там для нахождения базиса тождеств [квази]многообразия $\mathbf{SP}(\mathcal{O}(M_n))$, порожденного решеткой подпорядков $\mathcal{O}(M_n)$ решетки M_n . Тожество (C_n) явилось, в свою очередь, обобщением одного тождества, введенного в работе [7], которое использовалось там для нахождения базиса тождеств [квази]многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденного пентагоном N_5 . Справедливо такое утверждение.

Лемма 4. Тожество (C_2) влечет тождество (D_3) .

Доказательство. Действительно, предположим, что решетка L удовлетворяет тождеству (C_2) , и покажем, что L удовлетворяет тождеству (D_3) . Для произвольных элементов $a, a_0, a_1, a_2, a_3 \in L$ рассмотрим интерпретацию γ , определенную следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \gamma(x) &= a; & \gamma(y_0) &= a_0; & \gamma(y_1) &= a_1 \vee a_2 \vee a_3; \\
 \gamma(z_0) &= a_1; & \gamma(z_1) &= a_0 \vee a_2 \vee a_3; \\
 \gamma(w_0) &= a_2; & \gamma(w_1) &= a_0 \vee a_1 \vee a_3.
 \end{aligned}$$

Тогда значение левой части тождества (C_2) при интерпретации γ равно $a \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2 \vee a_3)$. Кроме того, непосредственные вычисления показывают, что значение правой части тождества (C_2) при интерпретации γ меньше или равно $\bigvee_{i < 4} (a \wedge \bigvee \{a_j \mid j < 4, j \neq i\})$. Отсюда следует, что L удовлетворяет тождеству (D_3) . $\square$

Следующее утверждение является частным случаем леммы 6 из [9] для $n = 2$.

Предложение 2. [9, Лемма 6] Пусть L является решеткой и пусть множество $J \subseteq J(L)$ таково, что для любого элемента $a \in L$ найдется подмножество $J_a \subseteq J$, такое что $a = \bigvee J_a$. Следующие условия равносильны.

- (i) Тождество (C_2) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq a_0 \vee a_1$, $a \leq b_0 \vee b_1$ и $a \leq c_0 \vee c_1$ являются нетривиальными покрытиями для некоторых элементов $a \in J$ и $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in L$, то два из этих трех покрытий имеют общее утончающее покрытие $a \leq c \vee d$.

Доказательство следующего утверждения вытекает из доказательства [9, Corollary 7] для $n = 2$.

Следствие 1. Для решетки L рассмотрим следующие условия.

- (i) Тождество (C_2) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq a_0 \vee a_1$, $a \leq b_0 \vee b_1$ и $a \leq c_0 \vee c_1$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in J$, то два из этих трех покрытий совпадают.

Тогда условие (i) влечет условие (ii).

Лемма 5. В решетке $O(4)$ истинно тождество (C_2) .

Доказательство. В силу леммы 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где $J = \{(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq 3\}$. Все минимальные покрытия для всех элементов множества J в решетке $O(4)$ выписаны в доказательстве леммы 3. Таким образом, видно, что для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 2. Поэтому тождество (C_2) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 2. $\square$

3.3 Новые тождества

Рассмотрим также следующие четыре тождества, которые обозначим через (1), (2), (3), (4), (5), (6) и (7) соответственно:

$$x \wedge \left(y_0 \vee y_1 \vee (y_2 \wedge (z_0 \vee z_1)) \right) = \bigvee_{i < 2} [x \wedge (y_i \vee (y_2 \wedge (z_0 \vee z_1)))] \vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee (y_2 \wedge z_i))].$$

$$x \wedge \left(y_0 \vee \left(y_1 \wedge (z_0 \vee z_1 \vee z_2) \right) \right) = [x \wedge y_1 \wedge (z_0 \vee z_1 \vee z_2)] \vee \\ \vee \bigvee_{i < j \leq 2} \left[x \wedge \left(y_0 \vee \left(y_1 \wedge (z_i \vee z_j) \right) \right) \right];$$

$$x \wedge \left[\left(y_0 \wedge (z_0 \vee z_1) \right) \vee \left(y_1 \wedge (w_0 \vee w_1) \right) \right] = \\ = \bigvee_{i < 2} \left[x \wedge \left[\left(y_0 \wedge z_i \right) \vee \left(y_1 \wedge (w_0 \vee w_1) \right) \right] \right] \vee \\ \vee \bigvee_{i < 2} \left[x \wedge \left[\left(y_0 \wedge (z_0 \vee z_1) \right) \vee \left(y_1 \wedge w_i \right) \right] \right];$$

$$x \wedge \left(y_0 \vee \left[y_1 \wedge \left(z_0 \vee [z_1 \wedge (t_0 \vee t_1)] \right) \right] \right) = \left[x \wedge y_1 \wedge \left(z_0 \vee (z_1 \wedge (t_0 \vee t_1)) \right) \right] \vee \\ \vee \left[x \wedge \left(y_0 \vee \left(y_1 \wedge z_1 \wedge (t_0 \vee t_1) \right) \right) \right] \vee \\ \vee \bigvee_{i < 2} \left[x \wedge \left(y_0 \vee \left[y_1 \wedge \left(z_0 \vee (z_1 \wedge t_i) \right) \right] \right) \right].$$

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (z_0 \vee z_1 \vee z_2) = \\ = \bigvee_{\sigma \in S_3} \left[x \wedge \left((y_0 \wedge z_{\sigma(0)}) \vee (y_1 \wedge z_{\sigma(1)}) \vee (y_2 \wedge z_{\sigma(2)}) \right) \right] \vee \\ \vee \bigvee_{i < j < 3} \left[x \wedge (y_i \vee y_j) \wedge (z_0 \vee z_1 \vee z_2) \right] \vee \bigvee_{i < j < 3} \left[x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (z_i \vee z_j) \right];$$

$$x \wedge [y \vee (z \wedge (z_0 \vee z_1) \wedge (t_0 \vee t_1))] = [x \wedge z \wedge (z_0 \vee z_1) \wedge (t_0 \vee t_1)] \vee \\ \vee \bigvee_{i < 2} \left[x \wedge [y \vee (z \wedge z_i \wedge (t_0 \vee t_1))] \right] \vee \bigvee_{i < 2} \left[x \wedge [y \vee (z \wedge (z_0 \vee z_1) \wedge t_i)] \right] \vee \\ \vee \left[x \wedge [y \vee (z \wedge ((z_0 \wedge t_0) \vee (z_1 \wedge t_1) \vee (z_0 \wedge t_1) \vee (z_1 \wedge t_0)))] \right].$$

$$x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1 \vee z_2) = \bigvee_{i < 2, \sigma \in S_3} \left[x \wedge \left[(y_i \wedge z_{\sigma(0)}) \vee (y_{1-i} \wedge (z_{\sigma(1)} \vee z_{\sigma(2)})) \right] \right] \vee \\ \vee \bigvee_{i < 2} \left[x \wedge y_i \wedge (z_0 \vee z_1 \vee z_2) \right] \vee \\ \vee \bigvee_{i < j < 3} \left[x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_i \vee z_j) \right].$$

3.4 Тожество (1)

Предложение 3. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тожество (1) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ является минимальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, b_1, b_2 \in J$, то элементы b_0, b_1, b_2 просты.

Доказательство. Докажем сначала, что (i) влечет (ii). Предположим, что $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ является минимальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, b_1, b_2 \in J$, и покажем, что элемент b_2 является простым. Действительно, пусть $c_0, c_1 \in L$ таковы, что $b_2 \leq c_0 \vee c_1$. Тогда, используя тождество (1) при $x = a$, $y_0 = b_0$, $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, $z_0 = c_0$, $z_1 = c_1$, получим

$$\begin{aligned} a &= a \wedge \left(b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)) \right) = \\ &= \bigvee_{i < 2} [a \wedge (b_i \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)))] \vee \bigvee_{i < 2} [a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i))] = \\ &= \bigvee_{i < 2} [a \wedge (b_i \vee b_2)] \vee \bigvee_{i < 2} [a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i))]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в L , имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: $a = a \wedge (b_i \vee b_2) \leq b_i \vee b_2$ для некоторого $i < 2$. Поскольку $\{b_i, b_2\} \ll \{b_0, b_1, b_2\}$, а покрытие $a \leq b_i \vee b_2$ нетривиально, ввиду минимальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ получаем, что $\{b_0, b_1, b_2\} \subseteq \{b_i, b_2\}$, что невозможно.

Случай 2: $a = a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_j)) \leq b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)$ для некоторого $i < 2$. Полагаем $b'_2 = b_2 \wedge c_i$. Поскольку покрытие $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ минимально, покрытие $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b'_2$ нетривиально и $\{b_0, b_1, b'_2\} \ll \{b_0, b_1, b_2\}$, мы заключаем, что $b_2 \in \{b_0, b_1, b_2\} \subseteq \{b_0, b_1, b'_2\}$, то есть $b_2 = b'_2 = b_2 \wedge c_i \leq c_i$. Таким образом, элемент b_2 является простым, то есть заключение утверждения (ii) выполняется.

Теперь докажем, что (ii) влечет (i). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y_0 \mapsto b_0, \quad y_1 \mapsto b_1, \quad y_2 \mapsto b_2, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1.$$

Пусть u и v являются значениями соответственно левой и правой частей тождества (1) при интерпретации γ . Из вида тождества (1) следует, что

$u \geq v$. Нам нужно показать, что $u \leq v$. Согласно нашему предположению, существует подмножество $J_u \subseteq J$, такое что $u = \bigvee J_u$. Поэтому достаточно проверить, что для любого элемента $p \in J_u$ выполняется неравенство $p \leq v$. Действительно, если $p \leq u$, то

$$p \leq a \wedge \left(b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)) \right) = a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b'_2),$$

где $b'_2 = b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)$. Отсюда следует, что $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b'_2$. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $p \leq b_i$ для некоторого $i < 2$. В этом случае $p \leq b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_j)$ для любого $j < 2$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_j)) \leq v$, что и требовалось.

Случай 2: $p \leq b'_2 = b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)$. В этом случае $p \leq b_i \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))$ для любого $i < 2$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_i \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3: $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b'_2$ является нетривиальным покрытием. В этом случае, согласно определению 1, существуют элементы $d_0, \dots, d_k \in J$, такие что $p \leq d_0 \vee \dots \vee d_k$ является минимальным покрытием и $\{d_0, \dots, d_k\} \ll \{b_0, b_1, b'_2\}$. По предположению 1 имеет место неравенство $k < 3$. Возможны два подслучая.

Случай 3.1: $k = 2$. В этом случае $p \leq d_0 \vee d_1 \vee d_2$ является минимальным покрытием. Тогда по условию (ii) данного предложения все элементы d_0, d_1, d_2 просты; кроме того $\{d_0, d_1, d_2\} \ll \{b_0, b_1, b'_2\}$. Если $d_0, d_1, d_2 \leq b_i$ для некоторого $i < 2$ или $d_0, d_1, d_2 \leq b'_2$, то мы получаем неравенства $p \leq b_i$ или $p \leq b'_2$ соответственно. Но эти неравенства противоречат нетривиальности покрытия $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b'_2$. Таким образом, возможен один из следующих трех подслучаев.

Случай 3.1.1: $d_{\sigma(0)}, d_{\sigma(1)} \leq b_i$ для некоторого $i < 2$ и $d_{\sigma(2)} \leq b'_2$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0, d_1 \leq b_0$ и $d_2 \leq b'_2 = b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)$. Отсюда имеем $p \leq (d_0 \vee d_1) \vee d_2 \leq b_0 \vee b'_2 = b_0 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.1.2: $d_{\sigma(0)}, d_{\sigma(1)} \leq b'_2$ и $d_{\sigma(2)} \leq b_i$ для некоторого $i < 2$ и некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0, d_1 \leq b'_2$ и $d_2 \leq b_i$. Имеем $p \leq (d_0 \vee d_1) \vee d_2 \leq b'_2 \vee b_i = b_i \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_i \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))$

операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge (b_i \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.1.3: $d_{\sigma(0)} \leq b_0$, $d_{\sigma(1)} \leq b_1$ и $d_{\sigma(2)} \leq b'_2$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0 \leq b_0$, $d_1 \leq b_1$ и $d_2 \leq b'_2$. В этом случае $d_2 \leq b'_2 = b_2 \wedge (c_0 \vee c_1)$. Следовательно, $d_2 \leq b_2$ и $d_2 \leq c_0 \vee c_1$. Поскольку элемент d_2 прост, существует индекс $i < 2$, такой что $d_2 \leq c_i$. Поэтому $d_2 \leq b_2 \wedge c_i$. Таким образом, имеем $p \leq d_0 \vee d_1 \vee d_2 \leq b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.2: $k = 1$. В этом случае $p \leq d_0 \vee d_1$ является минимальным покрытием и $\{d_0, d_1\} \ll \{b_0, b_1, b'_2\}$. Если $d_0, d_1 \leq b_i$ для некоторого $i < 2$ или $d_0, d_1 \leq b'_2$, то мы получаем неравенства $p \leq b_i$ или $p \leq b'_2$ соответственно. Но эти неравенства противоречат нетривиальности покрытия $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b'_2$. Таким образом, возможен один из следующих подслучаев.

Случай 3.2.1: $d_{\sigma(0)} \leq b_0$ и $d_{\sigma(1)} \leq b_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0 \leq b_0$ и $d_1 \leq b_1$. В этом случае $p \leq d_0 \vee d_1 \leq b_0 \vee b_1 \leq b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)$ для любого $i < 2$. Применяя к двум неравенствам $p \leq b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)$ и $p \leq a$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee (b_2 \wedge c_i)) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.2.2: $d_{\sigma(0)} \leq b_i$ и $d_{\sigma(1)} \leq b'_2$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0 \leq b_0$ и $d_1 \leq b'_2$. В этом случае $p \leq d_0 \vee d_1 \leq b_0 \vee b'_2 = b_0 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))$. Поскольку $p \leq a$, имеем $p \leq a \wedge (b_0 \vee (b_2 \wedge (c_0 \vee c_1))) \leq v$, что и требовалось.

Мы показали, что неравенство $p \leq v$ выполняется во всех возможных случаях. Предложение полностью доказано. $\square$

Лемма 6. В решетке $O(4)$ истинно тождество (1).

Доказательство. В силу леммы 3 решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной решеткой. В силу леммы 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где $J = \{\{(i, j)\} \mid 0 \leq i < j \leq 3\}$. Все минимальные покрытия для всех элементов множества J в решетке $O(4)$ выписаны в доказательстве леммы 3. Таким образом, видно, что для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 3. Поэтому тождество (1) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 3. $\square$

3.5 Тожество (2)

Предложение 4. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть в L истинно тождество (1). Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тожество (2) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1$ и $b_1 \leq c_0 \vee \dots \vee c_n$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1 \in J$ и $c_0, \dots, c_n \in J$, то $n = 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что (i) влечет (ii). Пусть $a \leq b_0 \vee b_1$ и $b_1 \leq c_0 \vee \dots \vee c_n$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1 \in J$ и $c_0, \dots, c_n \in J$. Предположим, что заключение утверждения (ii) не выполняется, то есть $n > 1$. Полагаем $d_0 = c_0$, $d_1 = c_1$, $d_2 = c_2 \vee \dots \vee c_n$. Используя тождество (2) при $x = a$, $y_0 = b_0$, $y_1 = b_1$, $z_0 = d_0$, $z_1 = d_1$, $z_2 = d_2$, получим

$$a = a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1 \vee d_2))) = [a \wedge b_1 \wedge (d_0 \vee d_1 \vee d_2)] \vee \bigvee_{i < j \leq 2} [a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge (d_i \vee d_j)))]$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в L , имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: $a = a \wedge (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1 \vee d_2)) \leq b_1$.

В этом случае $a \leq b_1$, что противоречит нетривиальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1$.

Случай 2: $a = a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge (d_i \vee d_j)))$ для некоторых $i < j \leq 2$. В этом случае $a = a \wedge (b_0 \vee b'_1) \leq b_0 \vee b'_1$, где $b'_1 = b_1 \wedge (d_i \vee d_j)$. Поскольку покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ нетривиально, $a \leq b_0 \vee b'_1$ — также нетривиальное покрытие, причем $\{b_0, b'_1\} \ll \{b_0, b_1\}$. Так как покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ минимально, мы заключаем, что $b_1 \in \{b_0, b_1\} \subseteq \{b_0, b'_1\}$, то есть $b_1 = b'_1 = b_1 \wedge (d_i \vee d_j) \leq d_i \vee d_j$. Если $\{i, j\} = \{0, 1\}$, то $b_1 \leq d_0 \vee d_1 = c_0 \vee c_1$, что противоречит минимальности покрытия $b_1 \leq c_0 \vee \dots \vee c_n$, поскольку мы предположили, что $n > 1$. Если $i \in \{0, 1\}$, а $j = 2$, то $b_1 \leq d_i \vee d_2 = c_i \vee c_2 \vee \dots \vee c_n$. Ввиду минимальности покрытия $b_1 \leq c_0 \vee \dots \vee c_n$ это означает, что $\{c_0, \dots, c_n\} \subseteq \{c_i, c_2, \dots, c_n\}$, что невозможно.

Таким образом, мы установили, что ни один из возможных случаев не может иметь места. Это означает, что наше предположение о том, что $n > 1$, не верно. Поэтому заключение утверждения (ii) справедливо.

Теперь докажем, что (i) влечет (ii). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y_0 \mapsto b_0, \quad y_1 \mapsto b_1, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1, \quad z_2 \mapsto c_2.$$

Пусть u и v являются значениями соответственно левой и правой частей тождества (2) при интерпретации γ . Из вида тождества (2) следует, что $v \leq u$. Поэтому нам нужно показать, что $u \leq v$. Согласно нашему предположению, существует подмножество $J_u \subseteq J(L)$, такое что $u = \bigvee J_u$. Достаточно проверить, что для любого элемента $p \in J_u$ выполняется неравенство $p \leq v$. Действительно,

$$p \leq u = a \wedge [b_0 \vee (b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2))] = a \wedge (b_0 \vee b'_1),$$

где $b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$. Отсюда следует, что $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee b'_1$. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $p \leq b_0$. В этом случае $p \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$ для любых $i < j < 3$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge [b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))] \leq v$.

Случай 2: $p \leq b'_1$. В этом случае $p \leq b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$ и, поскольку $p \leq a$, имеем $p \leq a \wedge b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \leq v$.

Случай 3: $p \leq b_0 \vee b'_1$ является нетривиальным покрытием. В этом случае, согласно определению 1, существуют элементы $d_0, \dots, d_k \in J$, такие что $p \leq d_0 \vee \dots \vee d_k$ является минимальным покрытием и $\{d_0, \dots, d_k\} \ll \{b_0, b'_1\}$. По предложению 1 имеет место неравенство $k < 3$. Возможны два подслучая.

Случай 3.1: $k = 2$. В этом случае $p \leq d_0 \vee d_1 \vee d_2$ является минимальным покрытием. Тогда по предложению 3 все элементы d_0, d_1, d_2 просты; кроме того $\{d_0, d_1, d_2\} \ll \{b_0, b'_1\}$. Если $d_0, d_1, d_2 \leq b_0$ или $d_0, d_1, d_2 \leq b'_1$, то мы получаем неравенства $p \leq b_0$ или $p \leq b'_1$ соответственно. Но эти неравенства противоречат нетривиальности покрытия $p \leq b_0 \vee b'_1$. Таким образом, возможен один из следующих подслучаев.

Случай 3.1.1: $d_{\sigma(0)}, d_{\sigma(1)} \leq b_0$ и $d_{\sigma(2)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0, d_1 \leq b_0$ и $d_2 \leq b'_1$. В этом случае $d_2 \leq b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$. Из этого видно, что $d_2 \leq b_1$ и $d_2 \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$. Поскольку элемент d_2 простой, существует индекс $i < 3$ такой, что $d_2 \leq c_i$. Имеем $p \leq (d_0 \vee d_1) \vee d_2 \leq b_0 \vee (b_1 \wedge c_i) \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$, где $j < 3$ и $j \neq i$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge [b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))] \leq v$, то есть $p \leq v$.

Случай 3.1.2: $d_{\sigma(0)} \leq b_0$ и $d_{\sigma(1)}, d_{\sigma(2)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $d_0 \leq b_0$ и $d_1, d_2 \leq b'_1$. В этом случае $d_1 \vee d_2 \leq b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$, как и в предыдущем случае $d_1 \vee d_2 \leq b_1$ и $d_1 \vee d_2 \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$. Поскольку элементы d_1, d_2 простые, существуют индексы $i, j < 3$ такие, что $d_1 \leq c_i$ и $d_2 \leq c_j$. Тогда $p \leq d_0 \vee (d_1 \vee d_2) \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge [(b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j)))] \leq v$.

Случай 3.2: $k = 1$. В этом случае $p \leq d_0 \vee d_1$ является минимальным покрытием. Кроме того, $\{d_0, d_1\} \ll \{b_0, b'_1\}$. Пусть для определенности $d_0 \leq b_0$ и $d_1 \leq b'_1$. Тогда $d_1 \leq b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$. Из этого видно, что $d_1 \leq b_1$ и $d_1 \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$. Вновь возможны следующие подслучаи.

Случай 3.2.1: $d_1 \leq c_j$ для некоторого $j < 3$. В этом случае $d_1 \leq b_1 \wedge c_j \leq b_1 \wedge (c_i \vee c_j)$ для любого $i < 3$, отличного от j . Таким образом, $p \leq d_0 \vee d_1 \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$. Теперь применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge [b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))] \leq v$, то есть $p \leq v$.

Случай 3.2.2: покрытие $d_1 \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ нетривиально. Согласно определению 1, существуют элементы $e_0, \dots, e_n \in J$ такие, что $d_1 \leq e_0 \vee \dots \vee e_n$ — минимальное покрытие и $\{e_0, \dots, e_n\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. По нашему предположению условие (ii) настоящего предложения выполнено. Поэтому $n = 1$, покрытие $d_1 \leq e_0 \vee e_1$ минимально, и $\{e_0, e_1\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. Это означает, что существуют $i, j < 3$ такие, что $e_0 \leq c_i$ и $e_1 \leq c_j$. Таким образом, мы имеем $d_1 \leq b_1 \wedge (c_i \vee c_j)$ $p \leq d_0 \vee d_1 \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$. В качестве последнего шага мы применяем к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))$ операцию пересечения $\wedge$ и получаем неравенство $p \leq a \wedge [b_0 \vee (b_1 \wedge (c_i \vee c_j))] \leq v$, то есть $p \leq v$.

Мы показали, что неравенство $p \leq v$ выполняется во всех возможных случаях. Предложение полностью доказано. $\square$

Лемма 7. В решетке $O(4)$ истинно тождество (2).

Доказательство. По лемме 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где J — множество ее атомов.

Решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной по лемме 3. По лемме 6 на $O(4)$ истинно тождество (1). В силу доказательства леммы 3 для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 4. Поэтому тождество (2) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 4. $\square$

3.6 Тожество (3)

Предложение 5. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть тождество (1) истинно в L . Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тожество (3) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1$ является минимальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, b_1 \in J$, то элемент b_i прост для некоторого $i < 2$.

Доказательство. Докажем сначала, что (i) влечет (ii). Предположим, что $a \leq b_0 \vee b_1$ является минимальным покрытием для некоторых элементов $a, b_0, b_1 \in J$, и покажем, что элемент b_i является простым для некоторого $i < 2$. Действительно, пусть $c_0, c_1, d_0, d_1 \in L$ таковы, что $b_0 \leq c_0 \vee c_1$ и $b_1 \leq d_0 \vee d_1$. Тогда, используя тождество (3) при $x = a, y_0 = b_0, y_1 = b_1, z_0 = c_0, z_1 = c_1, w_0 = d_0$ и $w_1 = d_1$, получим

$$\begin{aligned} a = a \wedge (b_0 \vee b_1) &= a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] = \\ &= \bigvee_{i < 2} [a \wedge [(b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))]] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < 2} [a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)]]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в L , имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: существует $i < 2$, такой что $a = a \wedge [(b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] = a \wedge (b'_0 \vee b_1)$, где $b'_0 = b_0 \wedge c_i$. Так как покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ нетривиально и $\{b'_0, b_1\} \ll \{b_0, b_1\}$, покрытие $a \leq b'_0 \vee b_1$ также является нетривиальным. В силу минимальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1$ заключаем, что $b_0 \in \{b_0, b_1\} \subseteq \{b'_0, b_1\}$. Таким образом, $b_0 = b'_0 = b_0 \wedge c_i \leq c_i$ для некоторого $i < 2$, и элемент b_0 является простым.

Случай 2: существует $i < 2$, такой что $a = a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)] = a \wedge (b_0 \vee b'_1)$, где $b'_1 = b_1 \wedge d_i$. Поскольку покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ минимально и $\{b_0, b'_1\} \ll \{b_0, b_1\}$, покрытие $a \leq b_0 \vee b'_1$ нетривиально. Следовательно, $b_1 \in \{b_0, b_1\} \subseteq \{b_0, b'_1\}$, то есть $b_1 = b'_1 = b_1 \wedge d_i \leq d_i$. Таким образом, элемент b_1 является простым, то есть заключение утверждения (ii) выполняется.

Теперь докажем, что (ii) влечет (i). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y_0 \mapsto b_0, \quad y_1 \mapsto b_1, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1, \quad w_0 \mapsto d_0, \quad w_1 \mapsto d_1.$$

Пусть u и v являются значениями соответственно левой и правой частей тождества (3) при интерпретации γ . Из вида тождества (3) следует, что $u \geq v$. Нам нужно показать, что $u \leq v$. Согласно нашему предположению, существует подмножество $J_u \subseteq J$, такое что $u = \bigvee J_u$. Поэтому достаточно проверить, что для любого элемента $p \in J_u$ выполняется неравенство $p \leq v$. Действительно, если $p \leq u$, то

$$p \leq a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] = a \wedge (b'_0 \vee b'_1),$$

где $b'_0 = b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)$ и $b'_1 = b_1 \wedge (d_0 \vee d_1)$. Отсюда следует, что $p \leq a$ и $p \leq b'_0 \vee b'_1$. Возможны три случая.

Случай 1: $p \leq b'_0$. В этом случае $p \leq b_0 \wedge (c_0 \vee c_1) \leq (b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)$ для любого $i < 2$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)] \leq v$, что и требовалось.

Случай 2: $p \leq b'_1$. В этом случае $p \leq b_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq (b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))$ для любого $i < 2$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge [(b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] \leq v$, что и требовалось.

Случай 3: $p \leq b'_0 \vee b'_1$ является нетривиальным покрытием. В этом случае, согласно определению 1, существуют элементы $f_0, \dots, f_k \in J$, такие что $p \leq f_0 \vee \dots \vee f_k$ является минимальным покрытием и $\{f_0, \dots, f_k\} \ll \{b'_0, b'_1\}$. По предложению 1 имеют место неравенства $0 < k < 3$. Возможны два подслучая.

Случай 3.1: $k = 2$. В этом случае $p \leq f_0 \vee f_1 \vee f_2$ является минимальным покрытием. Тогда по условию (ii) предложения 2 все элементы f_0, f_1, f_2 просты; кроме того $\{f_0, f_1, f_2\} \ll \{b'_0, b'_1\}$. Если $f_0, f_1, f_2 \leq b'_i$ для некоторого $i < 2$, то мы получаем неравенства $p \leq f_0 \vee f_1 \vee f_2 \leq b'_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $p \leq b'_0 \vee b'_1$. Таким образом, возможен один из следующих двух подслучаев.

Случай 3.1.1: $f_{\sigma(0)}, f_{\sigma(1)} \leq b'_0$ и $f_{\sigma(2)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $f_0, f_1 \leq b'_0 = b_0 \wedge (c_0 \vee c_1) \leq c_0 \vee c_1$ и $f_2 \leq b'_1 = b_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq d_0 \vee d_1$. Поскольку элементы f_0, f_1, f_2 просты, получаем, что $f_2 \leq d_i$ для некоторого $i < 2$. Отсюда имеем $p \leq (f_0 \vee f_1) \vee f_2 \leq (b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq (b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_i)] \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.1.2: $f_{\sigma(0)} \leq b'_0$ и $f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что

$f_0 \leq b'_0 = b_0 \wedge (c_0 \vee c_1) \leq c_0 \vee c_1$ и $f_1, f_2 \leq b'_1 = b_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq d_0 \vee d_1$. Поскольку элементы f_0, f_1, f_2 просты, $f_0 \leq c_i$ для некоторого $i < 2$. Отсюда имеем $p \leq f_0 \vee (f_1 \vee f_2) \leq (b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq (b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge [(b_0 \wedge c_i) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.2: $k = 1$. В этом случае $p \leq f_0 \vee f_1$ является минимальным покрытием и $\{f_0, f_1\} \ll \{b'_0, b'_1\}$. Если $f_0, f_1 \leq b'_i$ для некоторого $i < 2$, то мы получаем неравенства $p \leq f_0 \vee f_1 \leq b'_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $p \leq b'_0 \vee b'_1$. Таким образом, $f_{\sigma(0)} \leq b'_0$ и $f_{\sigma(1)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $f_0 \leq b'_0 = b_0 \wedge (c_0 \vee c_1) \leq c_0 \vee c_1$ и $f_1 \leq b'_1 = b_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq d_0 \vee d_1$. По условию (ii) данного предложения получаем, что для некоторого $i < 2$ элемент f_i является простым. Если $i = 0$, то $f_0 \leq c_j$ для некоторого $j < 2$, поэтому $p \leq f_0 \vee f_1 \leq (b_0 \wedge c_j) \vee b'_1$. Вспоминая, что $p \leq a$, мы получаем $p \leq a \wedge [(b_0 \wedge c_j) \vee (b_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] \leq v$. Если $i = 1$, то $f_1 \leq d_j$ для некоторого $j < 2$. Таким образом, $p \leq f_0 \vee f_1 \leq (b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_j)$. Применяя к двум неравенствам $p \leq (b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_j)$ и $p \leq a$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge [(b_0 \wedge (c_0 \vee c_1)) \vee (b_1 \wedge d_j)] \leq v$, что и требовалось.

Мы показали, что неравенство $p \leq v$ выполняется во всех возможных случаях. Предложение полностью доказано. $\square$

Лемма 8. В решетке $O(4)$ истинно тождество (3).

Доказательство. По лемме 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где J — множество ее атомов. Решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной по лемме 3. По лемме 6 на $O(4)$ истинно тождество (1). В силу доказательства леммы 3 для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 5. Поэтому тождество (3) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 5. $\square$

3.7 Тождество (4)

Предложение 6. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть тождества (1) и (2) истинны в L . Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тождество (4) истинно в L .

- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1$ и $b_1 \leq c_0 \vee c_1$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1, c_0, c_1 \in J$, то элементы c_0 и c_1 являются простыми.

Доказательство. Докажем сначала, что (i) влечет (ii). Пусть $a \leq b_0 \vee b_1$ и $b_1 \leq c_0 \vee c_1$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1, c_0, c_1 \in J$. Действительно, пусть $d_0, d_1 \in L$ таковы, что $c_1 \leq d_0 \vee d_1$. Тогда, используя тождество (4) при $x = a$, $y_0 = b_0$, $y_1 = b_1$, $z_0 = c_0$, $z_1 = c_1$, $t_0 = d_0$, $t_1 = d_1$, получим

$$\begin{aligned} a \wedge \left(b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee [c_1 \wedge (d_0 \vee d_1)])] \right) &= \left[a \wedge b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge (d_0 \vee d_1))) \right] \vee \\ &\vee \left[a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c_1 \wedge (d_0 \vee d_1))) \right] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < 2} \left[a \wedge (b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в L , имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: $a = a \wedge b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge (d_0 \vee d_1)))$. В этом случае $a \leq b_1$, что противоречит нетривиальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1$. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 2: $a = a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c_1 \wedge (d_0 \vee d_1)))$. В этом случае $a = a \wedge (b_0 \vee b'_1) \leq b_0 \vee b'_1$, где $b'_1 = b_1 \wedge c_1 \wedge (d_0 \vee d_1)$. Поскольку покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ нетривиально и $\{b_0, b'_1\} \ll \{b_0, b_1\}$, покрытие $a \leq b_0 \vee b'_1$ также нетривиально. Так как покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ минимально, мы заключаем, что $b_1 \in \{b_0, b_1\} \subseteq \{b_0, b'_1\}$, то есть $b_1 = b'_1 = b_1 \wedge c_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq c_1$, что противоречит нетривиальности покрытия $b_1 \leq c_0 \vee c_1$. Этот случай также невозможен.

Случай 3: $a = a \wedge (b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))])$ для некоторого $i < 2$. В этом случае $a = a \wedge (b_0 \vee b'_1) \leq b_0 \vee b'_1$, где $b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))$. Поскольку покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ нетривиально и $\{b_0, b'_1\} \ll \{b_0, b_1\}$, получаем, что $a \leq b_0 \vee b'_1$ — также нетривиальное покрытие. Так как покрытие $a \leq b_0 \vee b_1$ минимально, мы заключаем, что $b_1 \in \{b_0, b_1\} \subseteq \{b_0, b'_1\}$, то есть $b_1 = b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i)) \leq c_0 \vee c'_1$, где $c'_1 \leq c_1 \wedge d_i$. Поскольку покрытие $b_1 \leq c_0 \vee c_1$ минимально и $\{c_0, c'_1\} \ll \{c_0, c_1\}$, покрытие $b_1 \leq c_0 \vee c'_1$ также нетривиально. Следовательно, $c_1 \in \{c_0, c_1\} \subseteq \{c_0, c'_1\}$, то есть $c_1 = c'_1 = c_1 \wedge d_i \leq d_i$ для некоторого $i < 2$. Это означает, что элемент c_1 является простым. Симметричным образом, элемент c_0 также прост. Таким образом, заключение утверждения (ii) выполнено.

Теперь докажем, что (ii) влечет (i). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y_0 \mapsto b_0, \quad y_1 \mapsto b_1, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1, \quad t_0 \mapsto d_0, \quad t_1 \mapsto d_1.$$

Пусть u и v являются значениями соответственно левой и правой частей тождества (4) при интерпретации γ . Из вида тождества (4) следует, что $v \leq u$. Нам нужно показать, что $u \leq v$. Согласно нашему предположению, существует подмножество $J_u \subseteq J$, такое что $u = \bigvee J_u$. Поэтому вновь достаточно проверить, что для любого элемента $p \in J_u$ выполняется неравенство $p \leq v$. Действительно, если $p \leq u$, то

$$p \leq a \wedge \left(b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee [c_1 \wedge (d_0 \vee d_1)])] \right) = a \wedge \left(b_0 \vee (b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1)) \right) = a \wedge (b_0 \vee b'_1),$$

где $c'_1 = c_1 \wedge (d_0 \vee d_1)$ и $b'_1 = b_1 \wedge [c_0 \vee (c_1 \wedge (d_0 \vee d_1))] = b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1)$. Отсюда следует, что $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee b'_1$. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $p \leq b_0$. В этом случае $p \leq b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]$ для любого $i < 2$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge \left(b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))] \right) \leq v$, что и требовалось.

Случай 2: $p \leq b'_1$. В этом случае $p \leq b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1)$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3: $p \leq b_0 \vee b'_1$ является нетривиальным покрытием. В этом случае, согласно определению 1, существуют элементы $f_0, \dots, f_k \in J$, такие что $p \leq f_0 \vee \dots \vee f_k$ является минимальным покрытием и $\{f_0, \dots, f_k\} \ll \{b_0, b'_1\}$. По предложению 1 имеем $0 < k < 3$. Возможны два подслучая.

Случай 3.1: $k = 2$. В этом случае $p \leq f_0 \vee f_1 \vee f_2$ является минимальным покрытием. Тогда по условию (ii) предложения 2 все элементы f_0, f_1, f_2 просты; кроме того $\{f_0, f_1, f_2\} \ll \{b_0, b'_1\}$. Если $f_0, f_1, f_2 \leq b_0$ или $f_0, f_1, f_2 \leq b'_1$, то мы получаем неравенства $p \leq b_0$ или $p \leq b'_1$ соответственно. Но это противоречит нетривиальности покрытия $p \leq b_0 \vee b'_1$. Таким образом, возможен один из следующих двух подслучаев.

Случай 3.1.1: $f_{\sigma(0)}, f_{\sigma(1)} \leq b_0$ и $f_{\sigma(2)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $f_0, f_1 \leq b_0$ и $f_2 \leq b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1) \leq c_0 \vee c'_1$. Кроме того, $f_2 \leq b_1$. Поскольку элемент f_2 прост, получаем, что $f_2 \leq c_0$ или $f_2 \leq c'_1$. Рассмотрим эти два случая отдельно.

Случай 3.1.1a: $f_2 \leq c_0$. В этом случае имеем $f_2 \leq b_1 \wedge c_0$ и $p \leq (f_0 \vee f_1) \vee f_2 \leq b_0 \vee (b_1 \wedge c_0) \leq b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]$ для любого $i < 2$. Применяя к двум

неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.1.1b: $f_2 \leq c'_1$. В этом случае $f_2 \leq b_1 \wedge c'_1$, поэтому $p \leq (f_0 \vee f_1) \vee f_2 \leq b_0 \vee (b_1 \wedge c'_1)$. Применяя к двум неравенствам $p \leq a$ и $p \leq b_0 \vee (b_1 \wedge c'_1)$ операцию пересечения $\wedge$, получим неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c'_1)) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.1.2: $f_{\sigma(0)} \leq b_0$ и $f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $f_0 \leq b_0$ и $f_1, f_2 \leq b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1) \leq c_0 \vee c'_1$. Кроме того, справедливы неравенства $f_1, f_2 \leq b_1$. Если $f_1, f_2 \leq c_0$, то $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1 \vee f_2) \leq a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c_0)) \leq v$. Если $f_1, f_2 \leq c'_1$, то $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1 \vee f_2) \leq a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c'_1)) \leq v$.

Предположим теперь, что $f_{\delta(1)} \leq c_0$ и $f_{\delta(2)} \leq c'_1$ для некоторой перестановки δ на множестве $\{1, 2\}$. В силу симметрии можем считать, что $f_1 \leq c_0$ и $f_2 \leq c'_1 = c_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq d_0 \vee d_1$. Кроме того, $f_2 \leq c_1$. Поскольку элемент f_2 прост, имеем $f_2 \leq d_i$ для некоторого $i < 2$. Тогда $f_2 \leq c_1 \wedge d_i$ и $p \leq f_0 \vee (f_1 \vee f_2) \leq b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]) \leq v$, что и требовалось.

Случай 3.2: $k = 1$. В этом случае $p \leq f_0 \vee f_1$ является минимальным покрытием и $\{f_0, f_1\} \ll \{b_0, b'_1\}$. Если $f_0, f_1 \leq b_0$ или $f_0, f_1 \leq b'_1$, то $p \leq b_0$ или $p \leq b'_1$ соответственно. Но это противоречит нетривиальности покрытия $p \leq b_0 \vee b'_1$.

Таким образом, $f_{\sigma(0)} \leq b_0$ и $f_{\sigma(1)} \leq b'_1$ для некоторой перестановки σ на множестве $\{0, 1\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $f_0 \leq b_0$ и $f_1 \leq b'_1 = b_1 \wedge (c_0 \vee c'_1) \leq c_0 \vee c'_1$. Кроме того, имеем $f_1 \leq b_1$. Если $f_1 \leq c_0$, то $f_1 \leq b_1 \wedge c_0$, поэтому $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1) \leq a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c_0)) \leq v$. Если $f_1 \leq c'_1$, то $f_1 \leq b_1 \wedge c'_1$, поэтому $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1) \leq a \wedge (b_0 \vee (b_1 \wedge c'_1)) \leq v$.

Теперь предположим, что $f_1 \leq c_0 \vee c'_1$ является нетривиальным покрытием. Тогда по определению J -решетки существует элементы $h_0, \dots, h_n \in J$, такие что $f_1 \leq h_0 \vee \dots \vee h_n$ является минимальным покрытием и $\{h_0, \dots, h_n\} \ll \{c_0, c'_1\}$. По предложению 3 имеет место равенство $n = 1$. Если $h_0, h_1 \leq c_0$ или $h_0, h_1 \leq c'_1$, то мы имеем $f_1 \leq c_0$ или $f_1 \leq c'_1$. Но эти неравенства противоречат нетривиальности покрытия $f_1 \leq c_0 \vee c'_1$. Таким образом, $h_{\delta(0)} \leq c_0$ и $h_{\delta(1)} \leq c'_1$ для некоторой перестановки δ на множестве $\{0, 1\}$. Для простоты обозначений будем считать, что $h_0 \leq c_0$ и $h_1 \leq c'_1 = c_1 \wedge (d_0 \vee d_1) \leq d_0 \vee d_1$. По условию (ii) данного предложения h_1 является простым элементом. Следовательно, $h_1 \leq d_i$ для некоторого $i < 2$, то есть $f_1 \leq b_1 \wedge (h_0 \vee h_1) \leq b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))$. Таким образом,

имеем $p \leq f_0 \vee f_1 \leq b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee [b_1 \wedge (c_0 \vee (c_1 \wedge d_i))]) \leq v$, что и требовалось.

Мы показали, что неравенство $p \leq v$ выполняется во всех возможных случаях. Предложение 6 полностью доказано. $\square$

Лемма 9. В решетке $O(4)$ истинно тождество (4).

Доказательство. Решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной по лемме 3. По лемме 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где J — множество ее атомов. По лемме 6 на $O(4)$ истинно тождество (1), а по лемме 7 на $O(4)$ истинно тождество (2). В силу доказательства леммы 3 для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 6. Поэтому тождество (4) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 6. $\square$

3.8 Тождество (5)

Предложение 7. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$. Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тождество (5) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ и $a \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2 \in J$, то $\{b_0, b_1, b_2\} = \{c_0, c_1, c_2\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что (i) влечет (ii). Предположим, что тождество (5) истинно в L ; пусть $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ и $a \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2 \in J$. Тогда, используя тождество (5) при $x = a$, $y_i = b_i$, $z_i = c_i$, где $i < 3$, получим

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) = \\ &= \bigvee_{\sigma \in S_3} [a \wedge ((b_0 \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_1 \wedge c_{\sigma(1)}) \vee (b_2 \wedge c_{\sigma(2)}))] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < j < 3} [a \wedge (b_i \vee b_j) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < j < 3} [a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (c_i \vee c_j)]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в решетке L , имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: $a = a \wedge [(b_0 \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_1 \wedge c_{\sigma(1)}) \vee (b_2 \wedge c_{\sigma(2)})] \leq d_0 \vee d_1 \vee d_2$, где $d_i = b_i \wedge c_{\sigma(i)}$, $i < 3$. Если $a \leq d_i$ для некоторого $i < 3$, то $a \leq d_i \leq b_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$. Таким образом, $a \leq d_0 \vee d_1 \vee d_2$ является нетривиальным покрытием, причем $\{d_0, d_1, d_2\} \ll \{b_0, b_1, b_2\}$ и $\{d_0, d_1, d_2\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. В силу минимальности двух последних покрытий получаем, что $\{b_0, b_1, b_2\} = \{d_0, d_1, d_2\} = \{c_0, c_1, c_2\}$.

Случай 2: $a = a \wedge (b_i \vee b_j) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$ для некоторых $i < j < 3$. В этом случае $a \leq b_i \vee b_j$ является нетривиальным покрытием, что противоречит минимальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$.

Случай 3: $a = a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (c_i \vee c_j)$ для некоторых $i < j < 3$. Этот случай симметричен случаю 2.

Таким образом, заключение утверждения (ii) выполнено.

Теперь докажем, что (ii) влечет (i). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных в решетке L :

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y_0 \mapsto b_0, \quad y_1 \mapsto b_1, \quad y_2 \mapsto b_2, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1, \quad z_2 \mapsto c_2.$$

Пусть u и v обозначают соответственно значения левой и правой частей тождества (5) при интерпретации переменных γ . Очевидно, что $v \leq u$. Покажем, что $u \leq v$. Согласно нашему предположению, существует подмножество $J_u \subseteq J$, такое что $u = \bigvee J_u$. Поэтому достаточно проверить, что для любого элемента $p \in J_u$ выполняется неравенство $p \leq v$. Действительно, если $p \leq u$, то

$$p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2).$$

Отсюда следует, что $p \leq a$, $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ и $p \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1: $p \leq b_i$ для некоторого $i < 3$. В этом случае $p \leq b_i \vee b_j$ для любого $j < 3$, такого что $j \neq i$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_i \vee b_j) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \leq v$, что и требовалось.

Случай 2: $p \leq c_i$ для некоторого $i < 3$. В этом случае так же как и выше получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (c_i \vee c_j) \leq v$.

Случай 3: $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ и $p \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ являются нетривиальными покрытиями. В этом случае, согласно определению 1, существуют множества $\{f_0, \dots, f_k\} \subseteq J$ и $\{g_0, \dots, g_n\} \subseteq J$, такие что $p \leq f_0 \vee \dots \vee f_k$ и $p \leq g_0 \vee \dots \vee g_n$ являются минимальными покрытиями, $\{f_0, \dots, f_k\} \ll \{b_0, b_1, b_2\}$ и $\{g_0, \dots, g_n\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. По предложению 1 имеем $0 < k, n < 3$. Возможны следующие случаи.

Случай 3.1: $\{f_0, \dots, f_k\} \ll \{b_i, b_j\}$ для некоторых $i < j < 3$. В этом случае $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \leq a \wedge (b_i \vee b_j) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \leq v$.

Случай 3.2: $\{g_0, \dots, g_n\} \ll \{c_i, c_j\}$ для некоторых $i < j < 3$. В этом случае $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (g_i \vee g_j) \leq a \wedge (b_0 \vee b_1 \vee b_2) \wedge (c_i \vee c_j) \leq v$.

Случай 3.3: случаи 3.1 и 3.2 не имеют места. В этом случае имеем $k = n = 2$. Поэтому согласно заключению утверждения (ii), имеем равенство $\{f_0, f_1, f_2\} = \{g_0, g_1, g_2\}$. Следовательно, найдется перестановка $\sigma \in S_3$, такая что для любого $i < 3$ справедливо равенство $f_i = g_{\sigma(i)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} p &\leq a \wedge [(f_0 \wedge g_{\sigma(0)}) \vee (f_1 \wedge g_{\sigma(1)}) \vee (f_2 \wedge g_{\sigma(2)})] \leq \\ &\leq a \wedge [(b_0 \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_1 \wedge c_{\sigma(1)}) \vee (b_2 \wedge c_{\sigma(2)})] \leq v, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Мы показали, что неравенство $p \leq v$ выполняется во всех возможных случаях. Предложение 7 полностью доказано. $\square$

Лемма 10. В решетке $O(4)$ истинно тождество (5).

Доказательство. Решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной по лемме 3. По лемме 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где J — множество ее атомов. В силу доказательства леммы 3 в решетке $O(4)$ есть единственное минимальное покрытие, содержащее три элемента. Таким образом, для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 7. Поэтому тождество (5) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 7. $\square$

3.9 Тождество (6)

Предложение 8. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть тождества (1), (2) и (5) истинны в L . Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тождество (6) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b \vee c$, $c \leq c_0 \vee c_1$ и $c \leq d_0 \vee d_1$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b, c, c_0, c_1, d_0, d_1 \in J$, то $\{c_0, c_1\} = \{d_0, d_1\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что (i) влечет (ii). Пусть $a \leq b \vee c$, $c \leq c_0 \vee c_1$ и $c \leq d_0 \vee d_1$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b, c, c_0, c_1, d_0, d_1 \in J$. Тогда, используя тождество (6) при $x = a$, $y = b$, $z = c$, $z_i = c_i$, $t_i = d_i$, где $i < 2$, получим

$$\begin{aligned} a &= a \wedge [b \vee (c \wedge (c_0 \vee c_1) \wedge (d_0 \vee d_1))] = \\ &= [a \wedge c \wedge (c_0 \vee c_1)] \vee \bigvee_{i < 2} [a \wedge [b \vee (c \wedge c_i \wedge (d_0 \vee d_1))]] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < 2} a \wedge [b \vee (c \wedge d_i \wedge (c_0 \vee c_1))] \vee \\ &\vee [a \wedge [b \vee (c \wedge ((c_0 \wedge d_0) \vee (c_1 \wedge d_1) \vee (c_0 \wedge d_1) \vee (c_1 \wedge d_0)))]]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в решетке L , имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: $a = a \wedge c \wedge (c_0 \wedge c_1)$. В этом случае $a \leq c$, что противоречит минимальности покрытия $a \leq b \vee c$.

Случай 2: $a = a \wedge [b \vee (c \wedge c_i \wedge (d_0 \vee d_1))]$. В этом случае $a \leq b \vee c'_i$, где $c'_i = c \wedge c_i \wedge (d_0 \vee d_1) \leq c$. Если $a \leq b$ или $a \leq c'_i \leq c$, то мы получаем противоречие с нетривиальностью покрытия $a \leq b \vee c$. Таким образом, покрытие $a \leq b \vee c'_i$ нетривиально и, очевидно, $\{b, c'_i\} \ll \{b, c\}$. По определению минимального покрытия имеем $\{b, c\} \subseteq \{b, c'_i\}$. Так как $c \not\leq b$, мы получаем равенство $c = c'_i \leq c_i$. Это, однако, противоречит нетривиальности покрытия $c \leq c_0 \vee c_1$. Таким образом, этот случай невозможен.

Случай 3: $a = a \wedge [b \vee (c \wedge d_i \wedge (c_0 \vee c_1))]$. Этот случай симметричен случаю 2 и также невозможен.

Случай 4: $a = a \wedge [b \vee (c \wedge ((c_0 \wedge d_0) \vee (c_1 \wedge d_1) \vee (c_0 \wedge d_1) \vee (c_1 \wedge d_0)))] \leq b \vee c'$, где $c' = c \wedge ((c_0 \wedge d_0) \vee (c_1 \wedge d_1) \vee (c_0 \wedge d_1) \vee (c_1 \wedge d_0)) \leq c$. Если $a \leq b$ или $a \leq c' \leq c$, то мы получаем противоречие с нетривиальностью покрытия $a \leq b \vee c$. Таким образом, покрытие $a \leq b \vee c'$ нетривиально и, очевидно, $\{b, c'\} \ll \{b, c\}$. В силу минимальности покрытия $a \leq b \vee c$ имеем $\{b, c\} \subseteq \{b, c'\}$. Так как $c \not\leq b$, мы получаем равенство $c = c' \leq \bigvee_{i,j < 2} e_{ij}$, где $e_{ij} = c_i \wedge d_j$ для всех $i, j < 2$. Если $c \leq e_{ij}$ для некоторых $i, j < 2$, то $c \leq e_{ij} \leq c_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $c \leq c_0 \vee c_1$. По определению J -решетки существует множество $\{f_0, \dots, f_n\} \subseteq J$, такое что покрытие $c \leq f_0 \vee \dots \vee f_n$ минимально и $\{f_0, \dots, f_n\} \ll \{e_{i,j} \mid i, j < 2\}$. Так как на решетке L истинно тождество (1), эта решетка удовлетворяет всем условиям предложения 4. Поскольку на решетке L истинно тождество (2), мы заключаем, что на L выполнено условие (ii) предложения 4. Применяя

это условие к минимальным покрытиям $a \leq b \vee c$ и $c \leq f_0 \vee \dots \vee f_n$, мы получаем, что $n = 1$ и покрытие $c \leq f_0 \vee f_1$ минимально. Возможны следующие подслучаи.

Случай 4.1: $f_0 \leq e_{ij}$ и $f_1 \leq e_{ik}$ для некоторых $i, j, k < 2$. В этом случае $c \leq f_0 \vee f_1 \leq e_{ij} \vee e_{ik} = (c_i \wedge d_j) \vee (c_i \wedge d_k) \leq c_i \vee c_i = c_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $c \leq c_0 \vee c_1$. Таким образом, этот случай невозможен.

Случай 4.2: $f_0 \leq e_{ij}$ и $f_1 \leq e_{kj}$ для некоторых $i, j, k < 2$. В этом случае $c \leq f_0 \vee f_1 \leq e_{ij} \vee e_{kj} = (c_i \wedge d_j) \vee (c_k \wedge d_j) \leq d_j \vee d_j = d_j$, что противоречит нетривиальности покрытия $c \leq d_0 \vee d_1$. Таким образом, этот случай также невозможен.

Случай 4.3: $f_0 \leq e_{ij}$ и $f_1 \leq e_{(1-i)(1-j)}$ для некоторых $i, j < 2$. В этом случае $c \leq f_0 \vee f_1 \leq e_{ij} \vee e_{(1-i)(1-j)} = (c_i \wedge d_j) \vee (c_{1-i} \wedge d_{1-j})$. Если $c \leq c_i \wedge d_j$, то $c \leq c_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $c \leq c_0 \vee c_1$. Если $c \leq c_{1-i} \wedge d_{1-j}$, то $c \leq c_{1-i}$, что вновь противоречит нетривиальности покрытия $c \leq c_0 \vee c_1$. Таким образом, покрытие $c \leq u \vee v$, где $u = c_i \wedge d_j$, а $v = c_{1-i} \wedge d_{1-j}$, нетривиально. Очевидно, $\{u, v\} \leq \{c_0, c_1\}$. В силу минимальности покрытия $c \leq c_0 \vee c_1$ мы заключаем, что $\{c_0, c_1\} \subseteq \{u, v\}$. Так как $c_m \not\leq c_{1-m}$ для всех $m < 2$, мы получаем равенства $c_i = u = c_i \wedge d_j \leq d_j$ и $c_{1-i} = v = c_{1-i} \wedge d_{1-j} \leq d_{1-j}$. С другой стороны, $\{u, v\} \leq \{d_0, d_1\}$. В силу минимальности покрытия $c \leq d_0 \vee d_1$ мы заключаем, что $\{d_0, d_1\} \subseteq \{u, v\}$. Так как $d_m \not\leq d_{1-m}$ для всех $m < 2$, в силу предыдущего мы получаем равенства

$$d_j = u = c_i \wedge d_j \leq c_i \leq d_j \quad \text{и} \quad d_{1-j} = v = c_{1-i} \wedge d_{1-j} \leq c_{1-i} \leq d_{1-j}.$$

Следовательно, $\{c_0, c_1\} = \{d_0, d_1\}$.

Таким образом, заключение утверждения (ii) выполнено.

Теперь докажем, что (ii) влечет (i). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных тождества (6) в решете L :

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y \mapsto b, \quad z \mapsto c, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1, \quad t_0 \mapsto d_0, \quad t_1 \mapsto d_1.$$

Пусть u и v являются значениями соответственно левой и правой частей тождества (6) при интерпретации γ . Очевидно, что $u \geq v$. Требуется показать, что $u \leq v$. Согласно нашему предположению, существует подмножество $J_u \subseteq J$, такое что $u = \bigvee J_u$. Поэтому вновь достаточно проверить, что для любого элемента $p \in J_u$ выполняется неравенство $p \leq v$. Действительно, если $p \in J_u$, то

$$p \leq u = a \wedge [b \vee (c \wedge (c_0 \vee c_1) \wedge (d_0 \vee d_1))].$$

Отсюда следует, что $p \leq a$ и $p \leq b \vee c'$, где $c' = c \wedge (c_0 \vee c_1) \wedge (d_0 \vee d_1)$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1: $p \leq b$. В этом случае для произвольного $i < 2$ имеем $p \leq a \wedge b \leq a \wedge [b \vee (c \wedge c_i \wedge (d_0 \vee d_1))] \leq v$.

Случай 2: $p \leq c'$. В этом случае $p \leq a \wedge c' \leq v$.

Случай 3: покрытие $p \leq b \vee c'$ нетривиально. По определению J -решетки найдется множество $\{f_0, \dots, f_n\} \subseteq J$, такое что покрытие $c \leq f_0 \vee \dots \vee f_n$ минимально и $\{f_0, \dots, f_n\} \ll \{b, c'\}$. По предложению 1 получаем, что $0 < n < 3$. Следовательно, возможны два подслучая.

Случай 3.1: $n = 1$, то есть покрытие $p \leq f_0 \vee f_1$ минимально. Без ограничения общности считаем, что $f_0 \leq b$ и $f_1 \leq c'$. Следовательно, $f_1 \leq c_0 \vee c_1$ и $f_1 \leq d_0 \vee d_1$. Если $f_1 \leq c_i$ для некоторого $i < 2$, то $f_1 \leq c' \wedge c_i = c \wedge c_i \wedge (d_0 \vee d_1)$, поэтому $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1) \leq a \wedge [b \vee (c \wedge c_i \wedge (d_0 \vee d_1))] \leq v$. Если $f_1 \leq d_i$ для некоторого $i < 2$, то $f_1 \leq c' \wedge d_i = c \wedge d_i \wedge (c_0 \vee c_1)$, поэтому $p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1) \leq a \wedge [b \vee (c \wedge d_i \wedge (c_0 \vee c_1))] \leq v$.

В противном случае покрытия $f_1 \leq c_0 \vee c_1$ и $f_1 \leq d_0 \vee d_1$ нетривиальны. В силу определения J -решетки найдутся конечные множества $S, T \subseteq J$, такие что покрытия $f_1 \leq \bigvee S$ и $f \leq \bigvee T$ минимальны и $S \ll \{c_0 \vee c_1\}$, $T \ll \{d_0, d_1\}$. По предложению 5 получаем, что $|S| = |T| = 2$; пусть $S = \{s_0, s_1\}$, $T = \{t_0, t_1\}$. В силу нашего предположения для минимальных покрытий $a \leq f_0 \vee f_1$, $f_1 \leq s_0 \vee s_1$, $f_1 \leq t_0 \vee t_1$ выполнено заключение утверждения (ii). Это означает, что $S = T$, то есть $s_0 = t_i$ и $s_1 = t_{1-i}$ для некоторого $i < 2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_1 &\leq c' \wedge ((s_0 \wedge t_i) \vee (s_1 \wedge t_{1-i})) = c \wedge ((s_0 \wedge t_i) \vee (s_1 \wedge t_{1-i})) \leq \\ &\leq c \wedge \left(\bigvee_{m,n < 2} (s_m \wedge t_n) \right) \leq c \wedge \left(\bigvee_{m,n < 2} (c_m \wedge d_n) \right), \end{aligned}$$

и поэтому

$$p \leq a \wedge (f_0 \vee f_1) \leq a \wedge \left[b \vee \left[c \wedge \left(\bigvee_{m,n < 2} (c_m \wedge d_n) \right) \right] \right] \leq v.$$

что и требовалось показать.

Таким образом, $p \leq v$ в любом случае, откуда следует требуемое неравенство $u \leq v$. Доказательство предложения 8 завершено. $\square$

Лемма 11. В решетке $O(4)$ истинно тождество (6).

Доказательство. Решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной по лемме 3. По лемме 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где J — множество ее

атомов. По лемме 6 на $O(4)$ истинно тождество (1), по лемме 7 на $O(4)$ истинно тождество (2), а по лемме 10 на $O(4)$ истинно тождество (5). В силу доказательства леммы 3 для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 8. Поэтому тождество (6) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 8. $\square$

3.10 Тождество (7)

Предложение 9. Пусть L является 3-дистрибутивной J -решеткой для некоторого множества $J \subseteq J(L)$ и пусть тождества (1), (2) и (5) истинны в L . Следующие условия эквивалентны.

- (i) Тождество (7) истинно в L .
- (ii) Если $a \leq b_0 \vee b_1$ и $a \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2 \in J$, то существуют $i < 2$ и перестановка $\sigma \in S_3$, такие что $b_i = c_{\sigma(0)}$, а $b_{1-i} \leq c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}$ является минимальным покрытием.

Доказательство. Установим сначала, что (i) влечет (ii). Действительно, пусть тождество (7) истинно в L и пусть $a \leq b_0 \vee b_1$ и $a \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ являются минимальными покрытиями для некоторых элементов $a, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2 \in J$. Тогда, используя тождество (5) при $x = a$, $y_i = b_i$, $z_j = c_j$, где $i < 2$, $j < 3$ получим

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) = \\ &= \bigvee_{i < 2, \sigma \in S_3} \left[a \wedge \left[(b_i \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)})) \right] \right] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < 2} \left[a \wedge b_i \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \right] \vee \bigvee_{i < j < 3} \left[a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (c_i \vee c_j) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент a $\vee$ -неразложим в решетке L , имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: $a = a \wedge \left[(b_i \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)})) \right]$ для некоторой перестановки $\sigma \in S_3$ и некоторого $i < 2$. Тогда $a \leq (b_i \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}))$. Полагаем для краткости $d_0 = b_i \wedge c_{\sigma(0)}$ и $d_1 = b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)})$. Если $a \leq d_0$, то $a \leq b_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1$. Если $a \leq d_1$, то $a \leq b_{1-i}$, что вновь противоречит нетривиальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1$. Таким образом, покрытие $a \leq d_0 \vee d_1$ нетривиально, причем $\{d_0, d_1\} \ll \{b_0, b_1\}$. В силу минимальности покрытия $\{b_0, b_1\}$ получаем,

что $\{b_0, b_1\} = \{d_0, d_1\}$; другими словами, $b_i = b_i \wedge c_{\sigma(0)} \leq c_{\sigma(0)}$ и $b_{1-i} = b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}) \leq c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}$. Следовательно, покрытие $\{b_i, c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}\}$ является нетривиальным и $\{b_i, c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. В силу минимальности последнего покрытия имеем $\{b_i, c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}\} = \{c_0, c_1, c_2\}$, поэтому $b_i = c_{\sigma(0)}$.

Покажем, что покрытие $b_{1-i} \leq c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}$ минимально. В силу минимальности покрытия $a \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ покрытие $b_{1-i} \leq c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}$ нетривиально. Пусть конечное множество $F \subseteq J$ таково, что покрытие $b_{1-i} \leq \bigvee F$ является минимальным и $F \ll \{c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}\}$. В силу предложения 4 мы заключаем, что $F = \{f_0, f_1\}$ для некоторых элементов $f_0, f_1 \in J$. Поскольку $a \leq b_0 \vee b_1 \leq b_i \vee f_0 \vee f_1$ и $b_i = c_{\sigma(0)}$, мы заключаем, что $\{b_i, f_0, f_1\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. В силу минимальности последнего покрытия имеем $\{b_i, f_0, f_1\} = \{c_0, c_1, c_2\}$, поэтому $\{f_0, f_1\} = \{c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}\}$, и покрытие $b_{1-i} \leq c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}$ минимально.

Таким образом, заключение утверждения (ii) выполнено в этом случае.

Случай 2: $a = a \wedge b_i \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$ для некоторого $i < 2$. В этом случае $a \leq b_i$, что противоречит нетривиальности покрытия $a \leq b_0 \vee b_1$.

Случай 3: $a = a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (c_i \vee c_j)$ для некоторых $i < j < 3$. В этом случае $a \leq c_i \vee c_j$, что противоречит минимальности покрытия $a \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$.

Поэтому заключение утверждения (ii) выполнено.

Теперь установим, что (ii) влечет (i). Рассмотрим произвольную интерпретацию переменных γ в решетке L :

$$\gamma: x \mapsto a, \quad y_0 \mapsto b_0, \quad y_1 \mapsto b_1, \quad z_0 \mapsto c_0, \quad z_1 \mapsto c_1, \quad z_2 \mapsto c_2.$$

Пусть u и v обозначают значения левой и правой частей тождества (7) при интерпретации γ . Очевидно, что $v \leq u$. Покажем, что $u \leq v$. Пусть элемент $p \in J$ таков, что $p \leq u$. Нам нужно проверить выполнение неравенства $p \leq v$. Действительно, из неравенства $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$ вытекают неравенства

$$p \leq a; \quad p \leq b_0 \vee b_1; \quad p \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1: $p \leq b_i$ для некоторого $i < 2$. В этом случае $p \leq b_i \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2)$. Поскольку $p \leq a$, получаем неравенство $p \leq a \wedge b_i \wedge (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \leq v$.

Случай 2: $p \leq c_i$ для некоторого $i < 3$. В этом случае так же как и выше получаем неравенство $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (c_i \vee c_j) \leq v$, где $i \neq j$.

Случай 3: покрытия $p \leq b_0 \vee b_1 \vee b_2$ и $p \leq c_0 \vee c_1 \vee c_2$ нетривиальны. В этом случае, согласно определению 1, существуют множества $\{f_0, \dots, f_k\} \subseteq J$ и

$\{g_0, \dots, g_n\} \subseteq J$, такие что $p \leq f_0 \vee \dots \vee f_k$ и $p \leq g_0 \vee \dots \vee g_n$ являются минимальными покрытиями, $\{f_0, \dots, f_k\} \ll \{b_0, b_1\}$ и $\{g_0, \dots, g_n\} \ll \{c_0, c_1, c_2\}$. По предложению 1 имеем $0 < k, n < 3$. Возможны следующие случаи.

Случай 3.1: $\{g_0, \dots, g_n\} \ll \{c_i, c_j\}$ для некоторых $i < j < 3$. В этом случае $p \leq a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (g_i \vee g_j) \leq a \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (c_i \vee c_j) \leq v$.

Случай 3.2: случай 3.1 не имеет места. В этом случае имеем $n = 2$. Предположим, что $k = 2$. Поскольку $L \models (5)$, согласно предложению 7(ii), имеем равенство $\{g_0, g_1, g_2\} = \{f_0, f_1, f_2\} \ll \{b_0, b_1\}$. Следовательно, найдутся перестановка $\sigma \in S_3$ и $i < 2$, такие что $g_{\sigma(0)} \leq b_i$ и $g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)} \leq b_{1-i}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} p &\leq a \wedge [(b_i \wedge g_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge g_{\sigma(1)}) \vee (b_{1-i} \wedge g_{\sigma(2)})] \leq \\ &\leq a \wedge [(b_i \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}))] \leq v, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Предположим теперь, что $k = 1$. В этом случае мы находимся в условиях предложения 9(ii). В силу нашего предположения, верно и заключение этого условия. Таким образом, найдутся $i, j < 2$ и перестановка $\sigma \in S_3$, такие что $g_{\sigma(0)} = f_i \leq b_j$ и $f_{1-i} \leq b_{1-j} \wedge (g_{\sigma(1)} \vee g_{\sigma(2)})$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} p &\leq a \wedge [(b_i \wedge g_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge (g_{\sigma(1)} \vee g_{\sigma(2)}))] \leq \\ &\leq a \wedge [(b_i \wedge c_{\sigma(0)}) \vee (b_{1-i} \wedge (c_{\sigma(1)} \vee c_{\sigma(2)}))] \leq v. \end{aligned}$$

Мы показали, что неравенство $p \leq v$ выполняется во всех возможных случаях. Предложение 9 полностью доказано. $\square$

Лемма 12. В решетке $O(4)$ истинно тождество (7).

Доказательство. Решетка $O(4)$ является 3-дистрибутивной по лемме 3. По лемме 2 решетка $O(4)$ является J -решеткой, где J — множество ее атомов. В силу доказательства леммы 3 в решетке $O(4)$ есть единственное минимальное покрытие $\{(0, 3)\} \leq \{(0, 1)\} \vee \{(1, 2)\} \vee \{(2, 3)\}$, содержащее три элемента. Кроме того, следующие покрытия также минимальны:

$$\begin{aligned} \{(0, 3)\} &\leq \{(0, 1)\} \vee \{(1, 3)\}; & \{(1, 3)\} &\leq \{(1, 2)\} \vee \{(2, 3)\}; \\ \{(0, 3)\} &\leq \{(0, 2)\} \vee \{(2, 3)\}; & \{(0, 2)\} &\leq \{(0, 1)\} \vee \{(1, 2)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что для решетки $O(4)$ выполняется условие (ii) предложения 9. Поэтому тождество (7) истинно в решетке $O(4)$ по предложению 9. $\square$

Полагаем $\Sigma = \{(C_2), (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7)\}$. Из лемм 3–12 получаем следующее утверждение, которое является основным результатом этого раздела.

Следствие 2. В решетке $O(4)$ истинны все тождества из Σ . Следовательно, $\mathbf{SP}(O(4)) \models \Sigma$.

§ 4. Основной результат

Здесь мы установим обращение следствия 2. А именно, мы покажем, что любая решетка, в которой истинны все тождества из Σ , принадлежит классу $\mathbf{SP}(O(4))$.

Предложение 10. Если в решетке L истинны все тождества из Σ , то $L \in \mathbf{SP}(O(4))$.

Доказательство. Пусть F обозначает решетку фильтров решетки L , упорядоченную относительно обратного включения. Тогда $F \models \Sigma$; в частности решетка F 3-дистрибутивна по лемме 4. В силу работы Дж. Б. Нейшна [14, теоремы 3.1–3.2], F является $J(F)$ -решеткой, см. также работу [15]. Таким образом, согласно леммам 3–12, раскрашенный лес, построенный по решетке F , (см. раздел 4 в работе [2]) может состоять лишь из раскрашенных деревьев высоты не более 2, удовлетворяющих следующим условиям:

- класс эквивалентности любого элемента содержит не менее двух и не более трех элементов;
- в дереве не более четырех листьев;
- если дерево содержит четыре листа, то оно имеет высоту 1.

Из доказательств теорем 4.5–4.6 из работы [2] мы получаем, что F вложима в декартово произведение решеток, изоморфных $O(3)$ или $O(2^2)$. Поскольку решетка $O(2^2)$ очевидным образом вложима в решетку $O(4)$, мы заключаем, что $F \in \mathbf{SP}(O(4))$ и поэтому $L \in \mathbf{SP}(O(4))$. $\square$

Из следствия 2 и предложения 10 мы получаем основной результат этой работы. А именно, имеет место

Теорема 1. Квазимногообразие $\mathbf{SP}(O(4))$, порожденное решеткой $O(4)$, является многообразием, а Σ образует его базис тождеств.

Список литературы

1. Семенова М.В. О решетках подпорядков // *Сибирский математический журнал*. 1999. Т. 40, № 3. С. 673-682.
2. Семенова М.В. О решетках, вложимых в решетки подпорядков // *Алгебра и логика*. 2005. Т. 44, № 4. С. 483-511.
3. Jipsen P., Rose H. *Varieties of Lattices*. Lecture Notes in Mathematics **1533**, Springer: New York–Heidelberg, 1992.
4. McKenzie R.N. Equational bases and non-modular lattice varieties // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1972. V. 174. P. 1-43.
5. Basheyeva A.O., Schwidefsky M.V., Sultankulov K.D. The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2022. V. 19, N 2. P. 902-911.
6. Башеева А.О., Швидефски М.В. Квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$. II. Результат о дуальности // *Сибирский математический журнал*. 2024. Т. 65, № 3. С. 446-454.
7. Dziobiak W., Schwidefsky M.V. Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract // *Bull. Sec. Logic*. 2022. V. 51, N 3. P. 329-344.
8. Дзебьяк В., Швидефски М.В. Дуальность для биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $(0, 1)$ -решеток, порожденному пентагоном // *Алгебра и логика*. 2024. Т. 63, № 2. С. 167-208.
9. Kadyrova O.A., Schwidefsky M.V. Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2023. V. 20, N 1. P. 62-71.
10. Freese R., Ježek J., Nation J.B. *Free Lattices*. Mathematical Surveys and Monographs **42**, American Mathematical Society, Providence: RI, 1995.
11. Grätzer G., *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser: Basel, 2011.
12. Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий*. Научная книга: Новосибирск, 1999;
13. Huhn A.P. Schwach distributive Verbände // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 1972. V. 33. P. 297-305.

14. Nation J.B. An approach to lattice varieties of finite height // *Algebra Universalis*. 1990. V. 27, N 4. P. 521-543.
15. Santocanale L., Wehrung F. Varieties of lattices with geometric descriptions // *Order*. 2013. V. 30, N 1. P. 13-38.

References

1. Semenova M.V. Lattices of suborders // *Siberian Math. J.* 1999. V. 40, N 3. P. 577-584.
2. Semenova M.V. On lattices that are embeddable into lattices of suborders // *Algebra and Logic*. 2005. V. 44, N 4. P. 270-285.
3. Jipsen P., Rose H. *Varieties of Lattices*. Lecture Notes in Mathematics **1533**, Springer: New York–Heidelberg, 1992.
4. McKenzie R.N. Equational bases and non-modular lattice varieties // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1972. V. 174. P. 1-43.
5. Basheyeva A.O., Schwedfsky M.V., Sultankulov K.D. The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2022. V. 19, N 2. P. 902-911.
6. Basheyeva A.O., Schwedfsky M.V. The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. II. A duality result // *Siberian Math. J.* 2024. V. 65, N 3. P. 514-521.
7. Dziobiak W., Schwedfsky M.V. Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract // *Bull. Sec. Logic*. 2022. V. 51, N 3. P. 329-344.
8. Dziobiak W., Schwedfsky M.V. Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0, 1)$ -lattices generated by the pentagon // *Algebra and Logic*. 2024. V. 63, N 2. P. 114-140.
9. Kadyrova O.A., Schwedfsky M.V. Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2023. V. 20, N 1. P. 62-71.
10. Freese R., Ježek J., Nation J.B. *Free Lattices*. Mathematical Surveys and Monographs **42**, American Mathematical Society, Providence: RI, 1995.
11. Grätzer G., *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser: Basel, 2011.
12. Gorbunov V.A. *Algebraic Theory of Quasivarieties*. Plenum: New York, 1998.

13. Huhn A.P. Schwach distributive Verbände // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 1972. V. 33. P. 297-305.
14. Nation J.B. An approach to lattice varieties of finite height // *Algebra Universalis*. 1990. V. 27, N 4. P. 521-543.
15. Santocanale L., Wehrung F. Varieties of lattices with geometric descriptions // *Order*. 2013. V. 30, N 1. P. 13-38.

Информация об авторах

Самариддин Эрматович Исомиддинов, аспирант

Марина Владимировна Швидефски, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник

SPIN 5724-7787 AuthorID: 14945

Scopus Author ID 58000305400 WoS Researcher ID: F-8922-2019

Author Information

Samariddin É. Isomiddinov, graduate student

Marina V. Schwidefsky, Doctor of Mathematics, Senior researcher

SPIN 5724-7787 AuthorID: 14945

Scopus Author ID 58000305400 WoS Researcher ID: F-8922-2019

*Статья поступила в редакцию 05.06.2026;
одобрена после рецензирования 28.07.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 05.06.2026;
approved after reviewing 28.07.2026; accepted for publication 06.08.2026*